

**НЕЛОКАЛЬНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА
С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ
ДЛЯ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ
ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА**

Г.К.НАМАЗОВ, Я.Т.МЕГРАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет

В работе исследована одна нелокальная обратная задача для псевдогиперболического уравнения четвёртого порядка с интегральным граничным условием. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности. Далее, пользуясь этими фактами доказывается существование и единственность классического решения исходной задачи.

Рассмотрим следующую задачу:

$$u_{tt}(x,t) - u_{ttxx}(x,t) - u_{xx}(x,t) = a(t)u(x,t) + f(x,t),$$

$$(x,t) \in D_T = \{(x,t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}, \quad (1)$$

$$u(x,0) + \delta u(x,T) = \varphi(x), u_t(x,0) + \delta u_t(x,T) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1, \quad (2)$$

$$u_x(0,t) = 0, \int_0^1 u(x,t) dx = 0, 0 \leq t \leq T, \quad (3)$$

$$u(0,t) = h(t), 0 \leq t \leq T, \quad (4)$$

где δ - заданное число, $f(x,t), \varphi(x), \psi(x), h(t)$ - заданные функции, а $u(x,t), a(t)$ - искомые функции.

Под классическим решением задачи (1)-(4) понимаем следующее

Определение. Классическим решением задачи (1)-(4) назовём пару $\{u(x,t), a(t)\}$ функций $u(x,t)$ и $a(t)$, обладающих следующими свойствами:

- 1) функция $u(x,t)$ непрерывна в D_T вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (1);
- 2) функция $a(t)$ непрерывна на $[0, T]$;
- 3) уравнение (1), условия (2), (3) и (4) удовлетворяются в обычном смысле.

Можно доказать следующую лемму:

Лемма 1. Пусть $\varphi'(0) = 0, \psi'(0) = 0, \int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0,$

$$\varphi(0) = h(0) + \delta h(T), \quad \psi(0) = h'(0) + \delta h'(T), \quad \int_0^1 f(x, t) dx = 0, \quad \delta \neq \pm 1 \text{ и } h(t) \in C^2[0, T],$$

$h'(t) \neq 0$ при $t \in [0, T]$. Тогда, при достаточно малых значениях T задача (1)-(4) эквивалентна задаче определения функций $u(x, t)$ и $a(t)$ из (1), (2) и

$$u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (5)$$

$$h''(t) - u_{xxxx}(0, t) - u_{xx}(0, t) = a(t)h(t) + f(0, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (6)$$

С целью исследования задачи (1),(2),(5),(6) рассмотрим следующие пространства. Обозначим через $B_{2,T}^\alpha$ [2] совокупность всех функций вида

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \lambda_k = k\pi,$$

рассматриваемых в D_T , где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0, T]$ и

$$J(u) \equiv \|u_0(t)\|_{C[0,T]} + \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \left(\lambda_k^\alpha \|u_k(t)\|_{C[0,T]} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,$$

причём $\alpha \geq 0$. Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,T}^\alpha} = J(u).$$

Через E_T^α обозначим пространство $B_{2,T}^\alpha \times C[0, T]$ вектор-функций $z(x, t) = \{u(x, t), a(t)\}$ с нормой

$$\|z\|_{E_T^\alpha} = \|u(x, t)\|_{B_{2,T}^\alpha} + \|a(t)\|_{C[0,T]}.$$

Известно, что $B_{2,T}^\alpha$ и E_T^α являются банаховыми пространствами.

Первую компоненту $u(x, t)$ решения $\{u(x, t), a(t)\}$ задачи (1),(2), (5),(6) будем искать в виде

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(t) \cos \lambda_k x, \quad \lambda_k = k\pi, \quad (7)$$

где

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Тогда, применяя формальную схему Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$(1 + \lambda_k^2) u_k''(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = F_k(t, u, a) \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (8)$$

$$u_k'(0) + \delta u_k'(T) = \varphi_k, \quad u_k'(0) + \delta u_k'(T) = \psi_k \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (9)$$

где

$$F_k(t, u, a) = f_k(t) + a(t)u_k(t)$$

$$f_k(t) = 2 \int_0^1 f(x, t) \cos \lambda_k x dx,$$

$$\varphi_k = 2 \int_0^1 \varphi(x) \cos \lambda_k x dx, \quad \psi_k = 2 \int_0^1 \psi(x) \cos \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Из (8)-(9) находим:

$$u_0(t) = (1 + \delta)^{-1} \{ \varphi_0 + (t - \delta T (1 + \delta)^{-1}) \psi_0 - \\ - \delta \int_0^T [T(1 - (1 + \delta)^{-1} \delta) + t - \tau] \cdot F_0(\tau, u, a) d\tau \} + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau, u, a) d\tau, \quad (10)$$

$$u_k(t) = \frac{1}{\beta_k \rho_k(T)} \{ \beta_k (\cos \beta_k t + \delta \cos \beta_k (T - t)) \varphi_k + (\sin \beta_k t - \delta \sin \beta_k (T - t)) \psi_k - \\ - \frac{\delta}{1 + \lambda_k^2} \int_0^T F_k(\tau, u) (\sin \beta_k (T + t - \tau) + \delta \sin \beta_k (t - \tau)) d\tau \} + \\ + \frac{1}{\beta_k (1 + \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau, u) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (11)$$

где

$$\beta_k = \frac{\lambda_k}{\sqrt{1 + \lambda_k^2}}, \quad \rho_k(T) = 1 + 2\delta \cos \beta_k T + \delta^2.$$

Очевидно, что

$$u'_k(t) = \frac{1}{\rho_k(T)} \{ \beta_k (-\sin \beta_k t + \delta \sin \beta_k (T - t)) \varphi_k + (\cos \beta_k t + \delta \cos \beta_k (T - t)) \psi_k - \\ - \frac{\delta}{1 + \lambda_k^2} \int_0^T F_k(\tau, u, a) (\cos \beta_k (T + t - \tau) + \delta \cos \beta_k (t - \tau)) d\tau \} + \\ + \frac{1}{1 + \lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau, u, a) \cos \beta_k (t - \tau) d\tau, \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (12)$$

$$u''_k(t) = \frac{1}{1 + \lambda_k^2} F_k(t, u, a) - \frac{\beta_k}{\rho_k(T)} \{ \beta_k (\cos \beta_k t + \delta \cos \beta_k (T - t)) \varphi_k + (\sin \beta_k t - \delta \sin \beta_k (T - t)) \psi_k - \\ - \frac{\delta}{1 + \lambda_k^2} \int_0^T F_k(\tau, u, a) (\sin \beta_k (T + t - \tau) + \delta \sin \beta_k (t - \tau)) d\tau \} - \\ - \frac{\beta_k}{1 + \lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau, u, a) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (13)$$

После подстановки выражения $u_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) в (12), для определения компоненты $u(x, t)$ решения задачи (1), (2), (5), (6) получаем:

$$\begin{aligned}
u(x,t) = & (1 + \delta)^{-1} \{ \varphi_0 + (t - \delta T(1 + \delta)^{-1}) \psi_0 - \\
& - \delta \int_0^T [T(1 - \delta(1 + \delta)^{-1}) + t - \tau] F_0(\tau; u, a) d\tau \} + \int_0^t (t - \tau) F_0(\tau; u, a) d\tau + \\
& + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{\beta_k}{\rho_k(T)} [\beta_k (\cos \beta_k t + \delta \cos \beta_k (T - t)) \varphi_k + (\sin \beta_k t - \delta \sin \beta_k (T - t)) \psi_k - \right. \\
& - \frac{\delta}{1 + \lambda_k^2} \int_0^T F_k(\tau; u, a) (\sin \beta_k (T + t - \tau) + \delta \sin \beta_k (t - \tau)) d\tau \} + \\
& + \frac{1}{\beta_k (1 + \lambda_k^2)} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \} \cos \lambda_k x. \tag{14}
\end{aligned}$$

Теперь, из (6), с учётом (12), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (u_k''(t) + u_k(t)) \right\}. \tag{15}$$

Далее, из (8), с учётом (13), получаем:

$$\begin{aligned}
v_k(t) \equiv \lambda_k^2 (u_k''(t) + u_k(t)) = & F_k(t, u, a) - u_k''(t) = \beta_k^2 F_k(t, u, a) + \\
& + \frac{\beta_k}{\rho_k(T)} \{ \beta_k (\cos \beta_k t + \delta \cos \beta_k (T - t)) \varphi_k + (\sin \beta_k t - \delta \sin \beta_k (T - t)) \psi_k - \\
& - \frac{\delta}{1 + \lambda_k^2} \int_0^T F_k(\tau; u, a) (\sin \beta_k (T + t - \tau) + \delta \sin \beta_k (t - \tau)) d\tau \} + \\
& - \frac{\beta_k}{1 + \lambda_k^2} \int_0^t F_k(\tau; u, a) \sin \beta_k (t - \tau) d\tau \quad (k = 1, 2, \dots). \tag{16}
\end{aligned}$$

Тогда из (15), имеем:

$$a(t) = h^{-1}(t) \left\{ h''(t) - f(0, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 v_k(t) \right\}. \tag{17}$$

Исходя из определения классического решения задачи (1),(2),(5),(6), легко доказывается следующая

Лемма 2. Если $\{u(x, t), a(t)\}$ - любое классическое решение задачи (1), (2), (5), (6), то функции

$$u_k(t) = 2 \int_0^1 u(x, t) \sin \lambda_k x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

удовлетворяют системе (15),(16).

Очевидно, что

$$1/\sqrt{2} < \beta_k < 1, \quad |\rho_k(T)| \geq 1 + \delta^2 - 2|\delta| \equiv 1/\rho.$$

Учитывая эти соотношения, из (11)-(13) и (16) имеем:

$$\begin{aligned}
|u_k(t)| &\leq \sqrt{2}\rho(1+|\delta|)(|\varphi_k|+|\psi_k|) + \sqrt{2}(1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\frac{\sqrt{T}}{\lambda_k^2}\left(\int_0^T|F_k(\tau,u,a)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \\
|u'_k(t)| &\leq \rho(1+|\delta|)(|\varphi_k|+|\psi_k|) + (1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\frac{\sqrt{T}}{\lambda_k^2}\left(\int_0^T|F_k(\tau,u,a)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \\
|u''_k(t)| &\leq \frac{1}{\lambda_k^2}|F_k(\tau,u,a)| + \rho(1+|\delta|)(|\varphi_k|+|\psi_k|) + (1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\frac{\sqrt{T}}{\lambda_k^2}\left(\int_0^T|F_k(\tau,u,a)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \\
|v_k(t)| &\leq |F_k(\tau,u,a)| + \rho(1+|\delta|)(|\varphi_k|+|\psi_k|) + (1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\frac{\sqrt{T}}{\lambda_k^2}\left(\int_0^T|F_k(\tau,u,a)|^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{6}\rho(1+|\delta|)\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{6}(1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|F_k(\tau,u,a)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq \sqrt{3}\rho(1+|\delta|)\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi'_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \sqrt{3}(1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|F_k(\tau,u,a)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u''_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|F_k(t,u,a)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} + \\
&\quad + 2\rho(1+|\delta|)\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \\
&\quad + 2(1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k|F_k(\tau,u,a)|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (20)
\end{aligned}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|v_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|F_k(t,u,a)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}} +$$

$$\begin{aligned}
& + 2\rho(1+|\delta|) \left[\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\varphi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 |\psi_k|)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right] + \\
& + 2(1+\rho|\delta|(1+|\delta|))\sqrt{T} \left(\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k |F_k(\tau; u, a)|)^2 d\tau \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (21)
\end{aligned}$$

Предположим, что данные задачи (1),(2),(5),(6) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x) \in C^2[0,1]$, $\varphi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$, $\varphi'(0) = \varphi'(1) = 0$.
2. $\psi(x) \in C^2[0,1]$, $\psi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$, $\psi'(0) = \psi'(1) = 0$.
3. $f(x,t) \in C_{x,t}^{2,0}(D_T)$, $f_{xxx}(x,t) \in L_2(D_T)$, $f_x(0,t) = f_x(1,t) = 0$; ($0 \leq t \leq T$).
4. $1 + 2\delta \cos \beta_k T + \delta^2 \neq 0$ ($k=1,2,\dots$), $1 + 2|\delta| - \delta^2 \neq 0$, $|\delta| \neq \pm 1$.
5. $h(t) \in C^2[0,T]$, $h(t) \neq 0$ при $t \in [0,T]$.

Тогда из (18)-(21) и (10) соответственно получаем:

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} & \leq \sqrt{6}\rho(1+|\delta|) \left(\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} \right) + \\
& + \sqrt{6}\rho(1+\rho(1+|\delta|))\sqrt{T} \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{L_2(0,1)}, \quad (22)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u'_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} & \leq \sqrt{3}\rho(1+|\delta|) \left(\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} \right) + \\
& + \sqrt{3}(1+\rho(1+|\delta|))\sqrt{T} \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{L_2(0,1)}, \quad (23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|u''_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} & \leq \left\| \|a(t)u_x(0,t) + f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)} + \\
& + 2\rho(1+|\delta|) \left(\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} \right) + \\
& + 2(1+\rho(1+|\delta|))\sqrt{T} \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad (24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^3 \|v_k(t)\|_{C[0,T]})^2 \right)^{\frac{1}{2}} & \leq 2 \left(\left\| \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_x(x,t)\|_{B_{2,T}^3} + \|f_x(x,t)\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)} \right) + \\
& + 2\rho(1+|\delta|) \left(\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} \right) + \\
& + 2(1+\rho(1+|\delta|))\sqrt{T} \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad (25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u_0(t)\|_{C[0,T]} & \leq (1 + \delta^{-1} \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + T(1 + |\delta|1 + \delta^{-1}) \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)}) + \\
& + T\sqrt{T} (2 + |\delta|(3 + |\delta|1 + \delta^{-1})) \|a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t)\|_{L_2(D_T)}, \quad (26)
\end{aligned}$$

Далее, из (22),(26) находим

$$\|u(x, t)\|_{B_{2,r}^3} \leq A_1(T) + A_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,r}^3}, \quad (27)$$

где

$$\begin{aligned} A_1(T) = & \sqrt{6} \rho (1 + |\delta|) \left(\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} \right) + \\ & + \sqrt{6} \rho (1 + |\delta|) \sqrt{T} \|f_x(x)\|_{L_2(D_T)} + |1 + \delta|^{-1} \left(\|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \\ & \left. + T(1 + |\delta| |1 + \delta|^{-1}) \|\psi(x)\|_{L_2(0,1)} \right) + T \sqrt{T} \left(2 + |\delta| (3 + |\delta| |1 + \delta|^{-1}) \right) \|f(x, t)\|_{L_2(D_T)}, \quad (28) \end{aligned}$$

$$A_2(T) = \left(2(1 + \rho(1 + |\delta|)) + T \sqrt{T} (2 + |\delta| (3 + |\delta| |1 + \delta|^{-1})) \right) \frac{T}{\sqrt{6}}. \quad (29)$$

Теперь из (22), с учётом (20), имеем:

$$\|a(t)\|_{C[0,T]} \leq B_1(T) + B_2(T) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u_x(x, t)\|_{B_{2,r}^3}, \quad (30)$$

где

$$\begin{aligned} B_1(T) = & \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} \left\{ \|h''(t)\|_{C[0,T]} + \|f(0, t)\|_{C[0,T]} + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{6}} \left[2 \|f_{xxx}(x, t)\|_{C[0,T]} \|_{L_2(0,1)} + 2\rho(1 + |\delta|) \left(\|\varphi'''(x)\|_{L_2(0,1)} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \|\psi'''(x)\|_{L_2(0,1)} \right) + 2(1 + |\delta| (1 + |\delta|)\rho) \sqrt{T} \|f_x(x, t)\|_{L_2(D_T)} \right] \right\}, \quad (31) \end{aligned}$$

$$B_2(T) = 2 \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]} (1 + (1 + \rho|\delta|(1 + |\delta|))T). \quad (32)$$

Из неравенств (32), (35) заключаем:

$$\begin{aligned} \|a(t)\|_{C[0,T]} + \|u(x, t)\|_{B_{2,r}^3} \leq & A_1(T) + B_1(T) + \\ & + (A_2(T) + B_2(T)) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,r}^3}. \quad (33) \end{aligned}$$

Итак, можно доказать следующую теорему

Теорема 1. Пусть выполнены условия 1-5. Тогда при достаточно малых значениях $T + \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}$ задача (1), (2), (5), (6) имеет в шаре $K = K_R \|z\|_{E_T^3} \leq \leq A_1(T) + B_1(T) + 2$ из E_T^3 единственное классическое решение.

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z = \Phi z, \quad (34)$$

где $z = \{u, a\}$, компоненты Φ_i ($i = 1, 2$) оператора $\Phi(u, a)$ определены правыми частями уравнений (14), (17), соответственно.

Рассмотрим оператор $\Phi(u, a)$ в шаре $K = K_R$ из E_T^3 .

Аналогично (33) получаем, что для любых $z, z_1, z_2 \in K_R$ справедливы оценки:

$$\|\Phi z\|_{E_T^3} \leq A_1(T) + B_1(T) + (A_2(T) + B_2(T)) \|a(t)\|_{C[0,T]} \|u(x, t)\|_{B_{2,r}^3}, \quad (35)$$

$$\|\Phi z_1 - \Phi z_2\|_{E_T^3} \leq (A_2(T) + B_2(T)) R \left(\|a_1(t) - a_2(t)\|_{C[0,T]} + \|u_1(x, t) - u_2(x, t)\|_{B_{2,r}^3} \right). \quad (36)$$

Тогда из оценок (35) и (36) следует, что при достаточно малых значениях

$T + \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}$ оператор Φ действует в шаре $K = K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u, a\}$, которая является решением уравнения (34).

Функция $u(x, t)$, как элемент пространства B_{2T}^3 , имеет непрерывные производные $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ в D_T .

Из неравенств (23)-(25) следует, что $u_t(x, t)$, $u_{tx}(x, t)$, $u_{ttx}(x, t)$, $u_{tt}(x, t)$, $u_{ttx}(x, t)$, $u_{ttx}(x, t)$, $u_{ttxx}(x, t)$ непрерывны в D_T .

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (5), (6) удовлетворяются в обычном смысле. Значит, $\{u(x, t), a(t)\}$ является классическим решением задачи (1), (2), (5), (6). Теорема доказана.

С помощью леммы 1, легко доказывается следующая

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1-5 и

$$\int_0^1 \varphi(x) dx = 0, \int_0^1 \psi(x) dx = 0, \int_0^1 f(x, t) dx = 0, \\ \varphi(0) = h(0) + \delta h(T), \psi(0) = h'(0) + \delta h'(T).$$

Тогда при достаточно малых значениях $T + \|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}$ задача (1)-(4) имеет в шаре $K = K_R \left(\|z\|_{E_T^3} \leq A_1(T) + B_1(T) + 2 \right)$ из E_T^3 единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Габов С.А., Оразов В.Б. Об уравнении $\frac{\partial^2}{\partial t^2} [u_{xx} - u] + u_{xx} = 0$ и некоторых связанных с ним задачах. Журнал вычислительной математики и математической физики. 1986, т.26, №1, с.92-102.
2. Xudaverdiyev K.I. Qeyri-xətti hiperbolik tənliklər üçün qoyulmuş çox-ölçülü qarışıq məsələ. Bakı-1987.

DÖRDÜNCÜ TƏRTİB PSEVDONİPERBOLİK TƏNLİK ÜÇÜN İNTEQRAL SƏRHƏD ŞƏRTLİ QEYRİ-LOKAL TƏRS MƏSƏLƏ

Q.K.NAMAZOV, Y.T.MEHRƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə dördüncü tərtib psevdohiperbolik tənlik üçün integral sərhəd şərtlilə bir qeyri-lokal tərs məsələsi tədqiq edilir. Bunun üçün əvvəlcə qoyulmuş məsələ ekvivalent məsələyə gətirilir və bu məsələnin həllinin varlığı və yeganəliyi isbat edilir. Sonra isə bunlardan istifadə edərək qoyulmuş məsələnin klassik həllinin varlığı və yeganəliyi göstərilir.

**NONLOCAL INVERSE PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITIONS FOR THE
PSEUDO-HYPERBOLIC EQUATION OF THE FORTH ORDER**

G.K.NAMAZOV, Y.T.MEHRALIYEV

SUMMARY

In this work is investigated a nonlocal inverse problem for the pseudo-hyperbolic equation of the forth order with integral boundary condition. First of all the initial problem reduces to the equalent problem, which for last one is proved the theorem of existence and uniqueness. Then using this fact and the fact about the existence and uniqueness of classic solution of the initial problem.